Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 142–143

Методы полиномиальной оптимизации в экстремальных геометрических задачах на сфере трехмерного евклидова пространства

Н. А. Куклин

Институт математики и механики УрО РАН им. Н. Н. Красовского, Институт математики и компьютерных наук Уральского федерального университета им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия

Аннотация. В докладе рассмотрены методы разложения пространства $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ в прямую сумму минимальных инвариантных (относительно компактной группы $\mathrm{S}(n) \times \mathrm{O}(3)$) подпространств, а также представлены новые результаты для конкретных экстремальных геометрических задач об оптимальном расположении точек на евклидовой сфере.

Пусть $\mathbb{S}^2$ — единичная сфера в трехмерном евклидовом пространстве. Для целого числа $n \geqslant 2$ обозначим через $(\mathbb{S}^2)^n$ декартово произведение n копий сферы $\mathbb{S}^2$. Элементы множества $(\mathbb{S}^2)^n$ являются упорядоченными наборами из n точек сферы $\mathbb{S}^2$ и называются сферическими кодами. На множестве $(\mathbb{S}^2)^n$ есть естественная геометрическая симметрия, а именно, будем считать два сферических кода одинаковыми, если один получается из другого

(1) перестановкой точек;

(2) действием некоторого ортогонального преобразования на все точки кода;

(3) композицией (1) и (2).

Таким образом, $(\mathbb{S}^2)^n$ инвариантно относительно компактной группы $\mathrm{S}(n) \times \mathrm{O}(3)$, где $\mathrm{S}(n)$ — конечная группа перестановок n-элементного множества, а $\mathrm{O}(3)$ — ортогональная группа трехмерного евклидова пространства.

Пусть W есть многочлен от $3n$ переменных с вещественными коэффициентами, инвариантный относительно группы $\mathrm{S}(n) \times \mathrm{O}(3)$. Рассмотрим задачу о нахождении величины $\min\{W(Q) \mid Q \in (\mathbb{S}^2)^n\}$. К такой задаче могут быть сведены различные экстремальные геометрические задачи об оптимальном расположении точек на сфере: задача Томсона, задача о контактном числе, задача о диктаторах.

Обозначим через $\mathcal{A}$ алгебру многочленов от $3n$ переменных. Множество $(\mathbb{S}^2)^n$ является аффинным алгебраическим многообразием в $\mathbb{R}^{3n}$; обозначим через $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ соответствующий идеал. Через $\mathcal{A}_{\leqslant d} \subset \mathcal{A}$ обозначим подпространство многочленов степени не выше d, а через $(\mathcal{A}/\mathcal{I})_{\leqslant d} \subset \mathcal{A}/\mathcal{I}$ — соответствующее подпространство в факторалгебре. Пусть $\Sigma_{\leqslant 2d} \subset (\mathcal{A}/\mathcal{I})_{\leqslant 2d}$ есть множество конечных сумм квадратов элементов из $(\mathcal{A}/\mathcal{I})_{\leqslant d}$. Schmüdgen's Positivstellensatz [1] влечет сходимость

$$\sup\{\gamma \in \mathbb{R} \mid W - \gamma \in \Sigma_{\leqslant 2d}\} \nearrow \min\{W(Q) \mid Q \in (\mathbb{S}^2)^n\}$$

Работа выполнена при поддержке Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-9356.2016.1) и Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

при $d \to \infty$. Задача $\sup\{\gamma \in \mathbb{R} \mid W - \gamma \in \Sigma_{\leqslant 2d}\}$ является задачей полуопределенного программирования (см., например, [2]).

Получающиеся задачи полуопределенного программирования оказываются сложными уже при малых n и d — размер матрицы зависит от размерности пространства $(\mathcal{A}\,/\,\mathcal{I})_{\leqslant d}$, а число ограничений — от размерности $(\mathcal{A}\,/\,\mathcal{I})_{\leqslant 2d}$. Чтобы уменьшить размеры матриц и количество ограничений, можно воспользоваться тем, что многочлен W является инвариантным относительно компактной группы $\mathrm{S}(n) \times \mathrm{O}(3)$. Впервые такой подход применялся в работе [3] для (отличной от рассматриваемой в данной работе) задачи минимизации многочленов, инвариантных относительно конечной группы отражений. Уменьшение соответствующих величин происходит за счет выбора специального базиса в пространстве $\mathcal{A}\,/\,\mathcal{I}$ из разложения $\mathcal{A}\,/\,\mathcal{I}$ в прямую сумму минимальных инвариантных подпространств.

Список литературы

1. *Schmüdgen K*. The K-moment problem for compact semi-algebraic sets // Math. Ann. 1991. Vol. 289. P. 203–206.
2. *Lasserre J.B*. Moments, Positive Polynomials and Their Applications // Imperial College Press Optimization Series. 2010. P. 361.
3. *Gatermann K*., *Parrilo P*. Symmetry groups, semidefinite programs, and sums of squares. J. Pure Appl. Algebra. 2004. Vol. 192. P. 95–128.